**Парність. Чергування. Розбиття на пари**

**1.**Катруся та її друзі стали в коло. Виявилося, що обидва сусіди в кожної дитини однієї статі. Хлопчиків серед Катрусиних друзів п’ять. А скільки дівчаток?

Розв'язання

Якщо в когось із Катрусиних друзів сусіди – тієї ж статі, то очевидно, що всі, хто стоять у колі, однієї статі. Тому хлопчики та дівчатка чергуються і, отже, дівчаток у колі стоїть стільки ж, скільки і хлопчиків: по п’ять. Отже, серед Катрусиних друзів є чотири дівчинки, а разом з нею п’ять дівчаток.

2.Чи можна опуклий 13-кутник розрізати на паралелограми?  
Розв'язання

Якщо опуклий многокутник можна розрізати на паралелограми, то його сторони обов'язково розбиваються на пари паралельних. Але 13 сто­рін не можна розбити на пари. Тому таке розрізання неможливе.

3. Петрик купив зошит обсягом 96 аркушів і занумерував сторінки: 1, 2, 3. 192. Василько вирвав із зошита 25 аркушів (не обов'язково по порядку) і склав усі 50 чисел, які на них написані. Чи міг він дістати число 2004?

Розв'язання

На кожному аркуші записані одне парне і одне непарне числа. Сума їх є число непарне. Тоді сума, що дістав Василько, це сума 25 непарних чи­сел, тому повинна бути непарною, а число 2004 — парне. Отже, відповідь на питання задачі негативна.

4. Добуток 22 цілих чисел дорівнює 1. Доведіть, що їх сума не дорівнює: а) нулю, б) одиниці.

Розв'язання

а) Легко бачити, що кожне з цих чисел дорівнює 1 або - 1. Для того, щоб їх добуток дорівнював додатному числу 1, треба, щоб кількість від'ємних множників була парною. З іншого боку, сума може дорівнювати нулю, якщо кількість чисел —1 дорівнює кількості чисел 1, тобто 11. Але 11 — число непарне.

б) Нехай сума дорівнює 1. Кількість додатних доданків дорівнює п, кількість від'ємних доданків дорівнює 22-*п*. Тоді 1•*п* -1(22-*п*) = 1, тобто 2*п*-22 =1. Але 2п і 22 — парні числа. Тому їх різниця не може бути не­парною.

5. Чи можна всі натуральні числа від 1 до 65 розбити на кілька груп так, щоб у кожній групі найбільше число дорівнювало сумі інших?

**Розв'язання**

Припустимо, що можна. Тоді в кожній групі сума чисел є парним чис­лом, тому сума всіх чисел від 1 до 65 теж має бути парною, але сума 1+2+3+...+65 = 65-33 — непарна. Отже, не може.

6. Дано шість чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Дозволяється до будь-яких двох  
з них додавати 1. Чи можна зробити всі числа рівними?

**Розв'язання**

Сума цих чисел дорівнює 21 і є числом непарним. Якщо до будь-яких двох чисел додати 1, то сума всіх чисел збільшиться на 2 і залишиться не­парною. Якби вдалося всі шість чисел зробити рівними, то їх сума була б числом парним. Отже, відповідь на питання задачі є негативною.

7. Чи можна скласти магічний квадрат із перших 36 простих чисел?

**Розв'язання**

Просте число 2 — парне, всі інші прості числа — непарні. Тому в стов­пчику, де стоятиме число 2, сума чисел буде непарною, а в усіх інших сто­впчиках — парною. Отже, такого квадрата не існує.

8.У ряд виписані числа від 1 до 10. Чи можна розставити між ними знаки «+» і «—» так, щоб значення здобутого виразу дорівнювало нулю?

**Розв'язання**

Оскільки в цьому ряду непарна кількість непарних чисел, то як би ми не розставили знаки, значення виразу буде числом непарним, а 0 — число парне. Отже, не можна.

9. У банці лежать білі і чорні зернята. Навмання виймають два з них. Якщо вони одного кольору, то замість них у банку кладуть чорне зернят­ко, якщо різних — то чорне зернятко забирають, а біле кладуть назад у банку. Врешті-решт у банці залишилось одне зернятко. Якого воно кольору, якщо спочатку білих зернят було 100?

**Розв'язання**

Після кожного кроку число білих і чорних зернят або не змінюється, або зменшується на 2. Тому кількість білих зернят у банці щоразу є числом парним. Отже, залишилось лише чорне зернятко.

10. 100 фішок поставлено в ряд. Дозволяється міняти місцями будь-які дві фішки, що стоять через одну. Чи можна таким способом переставити всі фішки у зворотному порядку?

Розв'язання

Занумеруємо місця, на яких стоять фішки, від 1 до 100. Зауважимо, що фішка, яка стоїть на парному місці, може перейти лише на парне місце, а фішка, яка стоїть на непарному місці, — тільки на непарне. Тому, зокре­ма, не вдається поміняти місцями фішку, що стоїть на першому місці, з фішкою, що стоїть на останньому. Звідси випливає, що переставити фішки в зворотному порядку неможливо.

11.На координатній площині накреслено коло з центром у точці (0; 0) та радіусом 2004. У кожній з точок площини, що лежать всередині кола та обидві координати яких є цілі числа, сидить павук. У якийсь момент кожен з павуків переповзає на одиничну відстань праворуч, ліворуч, вгору  
або вниз, залишаючись всередині кола (різні павуки можуть рухатись у різні боки). Чи обов'язково після переповзання два павуки зустрінуться в одній точці?

Розв'язання

Кількість павуків всередині кола є непарним числом, бо кожний павук змінює на одиницю одну зі своїх координат, тобто змінює парність суми своїх координат. Розіб'ємо павуків на дві групи: з парною сумою коорди­нат і непарною. Під час переповзання павуки з парною сумою координат займуть місце павуків з непарною сумою. І навпаки.

Припустимо, що після переповзання в кожній точці знову сидить один павук. Тоді під час переповзання кожен павук з першої групи займає місце павука з другої групи і навпаки. Звідси випливає, що в обох групах рівні кількості павуків, і тому загальна кількість павуків парна. Це супе­речить тому, що, як було сказано раніше, загальна кількість павуків не­парна. Отже, після переповзання знайдеться точка, в якій буде не менше ніж два павуки.

*Задачі для самостійного розв'язування*

1. Чи може кінь пройти з поля а / на поле Н8, при цьому побувати на кожному з інших полів рівно по одному разу?
2. На дошці 25x25 розставлено 25 шашок, причому їх розташування симетричне відносно діагоналі. Доведіть, що принаймні одна із шашок розташована на цій діагоналі.
3. На прямій взяли декілька точок. Потім між кожними сусідніми вставили ще по одній точці. Так повторили декілька разів. Чи могли діста­ти всього 2004 точки?
4. Квадрат 7x7 заповнений числами так, що добуток чисел кожного рядка від'ємний. Доведіть, що добуток чисел принаймні одного стовпчика теж від'ємний.
5. У загоні 120 осіб. Щовечора чергують троє. Чи можна скласти гра­фік чергування так, щоб кожні дві особи чергували разом рівно один раз?
6. По колу розставлено 9 чисел - 4 одиниці і 5 нулів. Щосекунди з числами проводять таку операцію: між сусідніми числами ставлять нуль, якщо вони різні, і одиницю, якщо вони рівні; після цього старі числа стира­ють. Чи можуть через деякий час всі числа стати однаковими?