Принцип Діріхле

1. В ящику лежать кулі двох різних кольорів: чорного і білого. Яку найменшу кількість куль требі взяти із ящика, не розглядаючи, так, щоб серед них напевно було дві кульки одного кольору?

Розв'язання

Дістанемо з ящика 3 кулі, оскільки кольорів 2. Тоді, за принципом Діріхле, знайдуться принаймні дві кулі одного кольору. З іншого боку, розуміло, що двох куль може й не вистачити.

2. Дано 12 цілих чисел. Доведіть, що серед них можна вибрати два, різниця яких ділиться на 11.

Розв'язання

При діленні на 11 можна дістати одинадцять різних остач: 0, 1, 2,…10. За принципом Діріхле, при діленні дванадцяти чисел на 11 знайдуться принаймні два, які даватимуть однакову остачу. Тоді різниця цих двох чисел. і ділиться на 11 без остачі.

**3.** У клітинках таблиці 3x3 розставлено числа -1; 0; 1. Доведіть, що деякі дві із 8 сум по всіх рядках, всіх стовпцях і двох головних діагоналях будуть рівні.

Розв'язання

Можливо мати лише 7 варіантів сум: -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3. Отже, за принципом Діріхле, якийсь варіант має повторитися.

4. Доведіть, що в будь-якій компанії з 5 осіб є двоє, що мають однакове число знайомих у цій компанії.

Розв'язання

Можливі два випадки: коли в компанії є хтось, хто знає чотирьох осіб, і коли в компанії такого немає. В першому випадку в цій компанії немає нікого, хто знав би 0 осіб. Отже, тоді маємо чотири варіанти знайомих: 1; 2; 3; 4. У другому випадку теж маємо чотири варіанти кількості знайомих: 0; 1;

2і 3. Оскільки 5 >4, то, за принципом Діріхле, серед п'яти осіб є принаймні дві, які мають однакову кількість знайомих.

5.Кожна точка площини пофарбована в один із двох кольорів: чорний чи білий. Доведіть, що існує відрізок довжиною 1 м, кінці якого мають однаковий колір.

Розв'язання

Розглянемо довільний правильний трикутник зі стороною 1 м. За принципом Діріхле, принаймні дві вершини його будуть одного кольору. Вони і є кінцями шуканого відрізка.

*Задачі для самостійного розв'язування*

1.У класі 25 учнів. Серед будь-яких трьох із них двоє дружать між собою. Доведіть, що є учень, у якого не менше ніж 12 друзів.

2. 10 школярів на олімпіаді розв'язали 35 задач, причому відомо, що серед них є школярі, які розв'язали рівно одну задачу, школярі, які розв’язали рівно дві задачі, і школярі, які розв'язали рівно три задачі. Доведіть що є школяр, який розв'язав не менше ніж п'ять задач.

**Інваріанти. Розфарбовування**

1.Дано таблицю 3x3 (рис). Дозволяється змінювати знак одночасно у всіх клітинках одного рядка або одного стовпчика. Чи можна дістати таблицю з самими плюсами

Розв 'язання

Замінимо плюси на 1, а мінуси — на -1. Тоді добуток чисел у чотирьох кутових клітинках дорівнює -1 і з кожною операцією не змінюється. Отримати таблицю з самими плюсами неможливо.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| + | + | — |
| — | + | + |
| + | - | + |

2. У кожній клітинці клітчатої дошки 7x11 сидить жук. У певний момент усі жуки переповзають в одну із сусідніх клітинок, що мають з ними спільну сторону. Доведіть, що після цього якась клітинка буде порожньою.

Розв'язання

Розфарбуємо дошку так, як пофарбована шахова дошка. Тоді кожна клітинка матиме з сусідніми тільки клітини, пофарбовані в протилежний колір. Оскільки всього клітинок 77, то матимемо 39 клітинок одного кольо­ру і 38 другого. Нехай для визначеності білих клітинок 39. Тоді 39 жуків, які сиділи на-білих клітинках, мають переповзти у 38 чорних клітинок. Тому знайдеться клітинка, на якій будуть сидіти принаймні два жуки, а тому знайдеться і порожня клітинка.

3.Доведіть, що дошку 6x6 не можна покрити дев'ятьма плитками 4x1

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 |
| 3 | 4 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 4 | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 2 |
| 2 | 3 | 4 | 1 | 2 | 3 |

Розв'язання

Розфарбуємо дошку в 4 кольори, як показано на рисунку. Які б клітинки не покривала плитка, вони матимуть різні кольори. Але тоді для того, щоб 9 плиток покрили всю дошку, клітинок кожного кольору теж повинно бути 9. Перевіркою встановлено, що це не так.